Тема "Решение задач на оптимизацию"

Учителя: Ушакова Н.А., учитель математики, Полянская И.И., учитель информатики и ИКТ
Интегрированный урок (математика, информатика) в 10 классе.

Цель урока: Научить решать задачи на оптимизацию аналитическим методом, методом дихотомии и с использованием электронных таблиц. Формировать навыки самостоятельного получения и обработки информации.

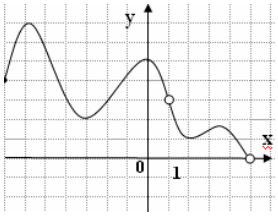
Задания для учащихся (на листах)

Задача 1.
При каких значениях переменной x функция принимает наибольшее и наименьшее значения?
Найдите наибольшее и наименьшее значения.

1. $y = log_5(x^2 - 10x + 30)$	$y_{наиб}$=	$y_{наим}$=
2. $y = 5\cos(5x + 7) + 1$	$y_{наиб}$=	$y_{наим}$=
3. $y = x^3 - 3$	$y_{наиб}$=	$y_{наим}$=
4. 2^{x^2-2x+3}	$y_{наиб}$=	$y_{наим}$=

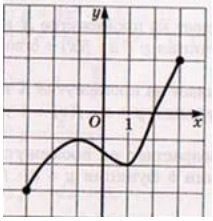
Задача 2.
Прочитайте графики и укажите наибольшее и наименьшее значения:

Задание № 1



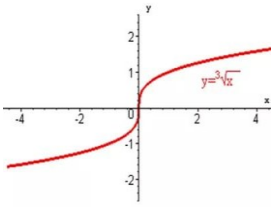
$y_{наиб}$=
$y_{наим}$=

Задание № 2



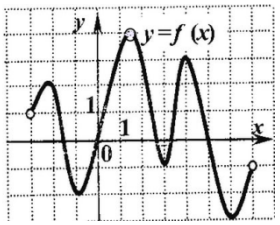
$y_{наиб}$=
$y_{наим}$=

Задание № 3



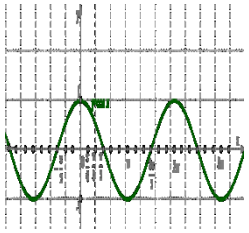
$y_{наиб}$=
$y_{наим}$=

Задание № 4



$y_{наиб}$=
$y_{наим}$=

Задание № 5



$y_{наиб}$=
$y_{наим}$=

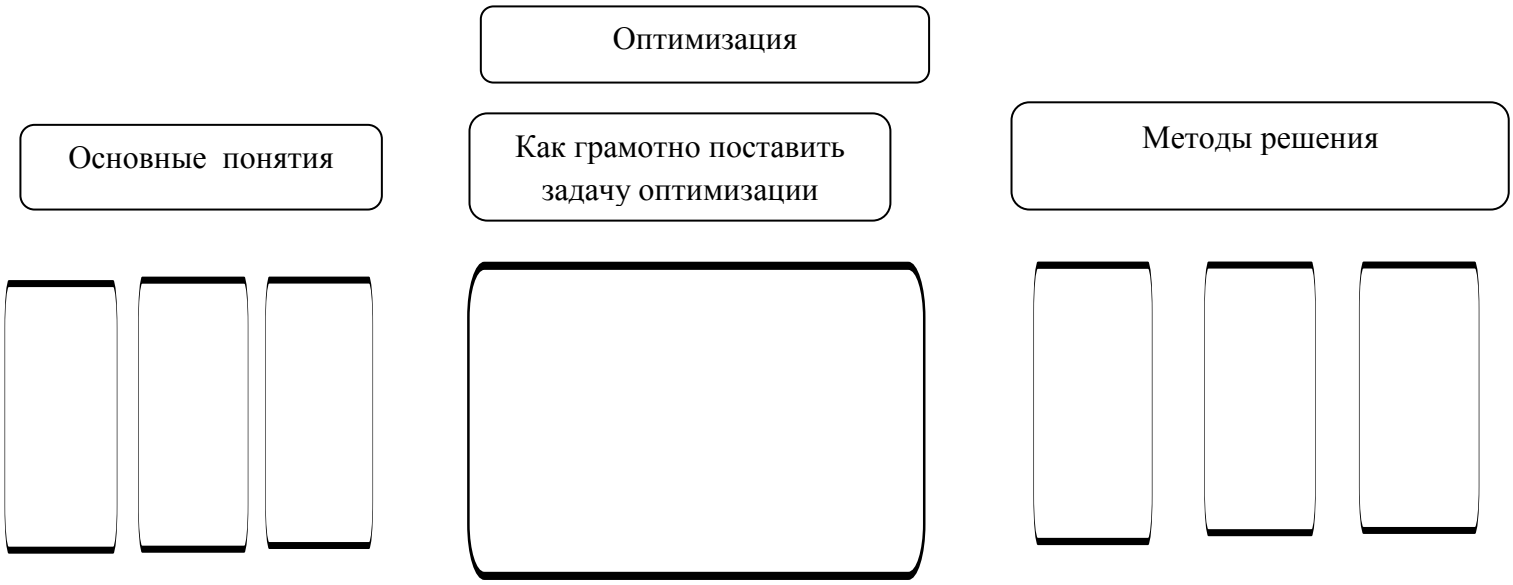
Задача 3. (*Работа в парах)*

Задание № 1 (I вариант)	Задание № 2 (II вариант)	Задание № 3 (III вариант)

Верно ли описан алгоритм нахождения ***максимального элемента последовательности*** *положительных чисел (ввод последовательности заканчивается 0)?*
Если программа содержит ошибки, то исправьте их.
program z1;
var a, max: real;
begin
read(a);
max:=a;
while a<>0 do begin
readln (a);
if max<a then max:=a;
end;
writeln (max);
end.
	Верно ли описан алгоритм нахождения ***минимального элемента последовательности*** *положительных чисел (ввод последовательности заканчивается 0)?*
	Если программа содержит ошибки, то исправьте их.
	program z2;
	var a, min: real;
	begin
	read(a);
	min:=a;
	while a<>0 do begin
	if min>a then
	min:=a;
	readln (a);
	end;
	writeln (min);
	end.
		Верно ли описан алгоритм нахождения ***минимального элемента последовательности*** *положительных чисел (ввод последовательности заканчивается 0)?*
		Если программа содержит ошибки, то исправьте их.
		program z3;
		var a, min: real;
		begin
		min:=0;
		while (a<>0) or (min=0) do
		begin
		if ((min>a) or (min=0)) then
		min:=a;
		readln (a);
		end;
		writeln (min);
		end.

Задача 4. *(Самостоятельная работа с учебником)*

Используя учебник (стр. 245-250) заполните кластер "Оптимизация".



Задача 5.

Зачем нужны ограничения в задаче оптимизации?

Задача 6. Задайте целевую функцию и ограничения

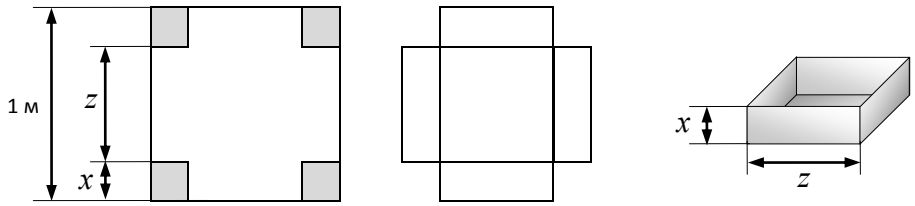
Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить куском проволоки длиной 2p?	
Известно, что одно из двух чисел на 36 больше другого. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.	
Диагональ боковой грани правильной четырёхугольной призмы равна d. При какой длине бокового ребра объём призмы будет наибольшим?	

Задача 7.

Решите задачу оптимальной раскройки листа различными способами, используя:

1. **Метод дихотомии (**напишите программу).
2. **Табличный процессор Excel**.
3. **Аналитический метод.**

В углах квадратного листа железа, сторона которого равна 1 м, вырезают четыре квадрата со стороной x. Затем складывают получившуюся развертку (по штриховым линиям на рисунке), сваривают швы и таким образом получается бак:



Определите размер выреза x, при котором получится бак наибольшего объема.

Объясните, как работает каждый метод.

Задача 8.

Укажите достоинства и недостатки методов.

Метод	**Метод дихотомии**	**Табличный процессор Excel**	**Аналитический метод**
Достоинства			
Недостатки			

Домашнее задание:

Вопросы и задания:

1. Предложите свою задачу оптимизации и ее решение.
2. Когда метод дихотомии не будет работать (может выдать неверный ответ)? (если коэффициент k = 0-концы отрезка x1 и x2 совпадут)
3. Можно ли задачу решения уравнения сформулировать как задачу оптимизации?

Подготовьте сообщение:

1. "Оптимизация методом случайного поиска".
2. "Оптимизация для функций двух переменных".
3. "Программное обеспечение для решения задач оптимизации".

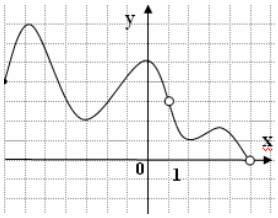
Ответы:

Задача 1. (*Самостоятельно работают. Меняются работами - проверяют. Фронтальная проверка.)*
При каких значениях переменной х функция принимает наибольшее и наименьшее значения?
Найдите наибольшее и наименьшее значения.

5. $y = log_5(x^2 - 10x + 30)$	$y_{наиб}$ - нет	$y_{наим}$=1
6. $y = 5\cos(5x + 7) + 1$	$y_{наиб}$=6	$y_{наим}$=-4
7. $y = x^3 - 3$	$y_{наиб}$- нет	$y_{наим}$ -нет
8. 2^{x^2-2x+3}	$y_{наиб}$-нет	$y_{наим}$=4

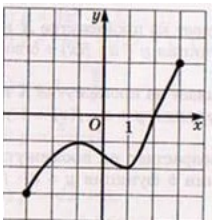
Задача 2.
Прочитайте графики и укажите наибольшее и наименьшее значения:

Задание № 1



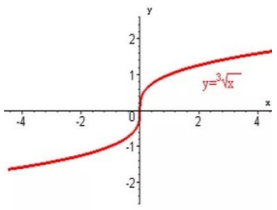
$y_{наиб}$=7
$y_{наим}$ - нет

Задание № 2



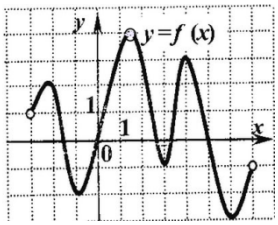
$y_{наиб}$=2
$y_{наим}$=-3

Задание № 3



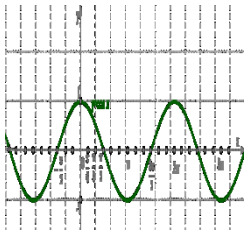
$y_{наиб}$-нет
$y_{наим}$-нет

Задание № 4



$y_{наиб}$ - нет
$y_{наим}$=-3

Задание № 5



$y_{наиб}$=1
$y_{наим}$=-1

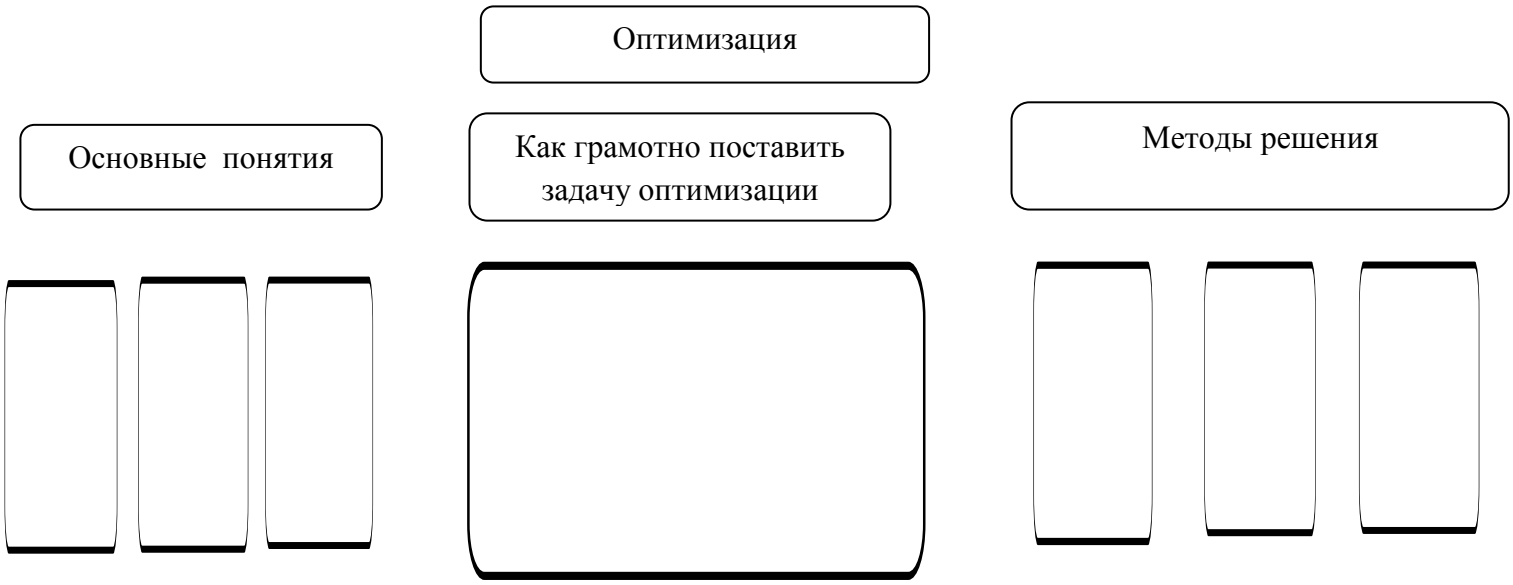
Задача 3. (*Работа в парах. Фронтальная проверка.)*

Задание № 1 (I вариант)	Задание № 2 (II вариант)	Задание № 3 (III вариант)
Верно ли описан алгоритм нахождения ***максимального элемента последовательности*** *положительных чисел (ввод последовательности заканчивается 0)?* *Если программа содержит ошибки, то исправьте их.*	*Верно ли описан алгоритм нахождения* ***минимального элемента последовательности*** *положительных чисел (ввод последовательности заканчивается 0)?* *Если программа содержит ошибки, то исправьте их.*	*Верно ли описан алгоритм нахождения* ***минимального элемента последовательности*** *положительных чисел (ввод последовательности заканчивается 0)?* *Если программа содержит ошибки, то исправьте их.*

program z1;
var a, max: real;
begin
read(a);
max:=a;
while a<>0 do begin
readln (a);
if max<a **then** max:=a;
end;
writeln (max);
end.
	program z2;
	var a, min: real;
	begin
	read(a);
	min:=a;
	while a<>0 do begin
	if min>a **then**
	min:=a;
	readln (a);
	end;
	writeln (min);
	end.
		program z3;
		var a, min: real;
		begin
		min:=0;
		while (a<>0) **or** (min=0) do
		begin
		if ((min>a) or (min=0)) then
		min:=a;
		readln (a);
		end;
		writeln (min);
		end.
		{со строкой
		while (a<>0) **and** (min=0)
		ни разу не сработает}

Задача 4. *(Самостоятельная работа с учебником. Обсуждаем)*

Используя учебник (стр. 245-250) заполните кластер "Оптимизация".



Оптимизация - это поиск наилучшего (оптимального) решения задачи в заданных условиях.(С точки зрения математики, цель оптимизации - выбрать величину х(или несколько неизвестных величин) наилучшим образом.

Оптимальное решение-решение, при котором целевая функция достигает максимума, или минимума.

Целевая функция - функция , для к. находится минимальное или максимальное значение.

Максимум, минимум. Локальный минимум, глобальный минимум.

Методы (способы): дихотомии, использование Excel, аналитический.

-Как грамотно поставить задачу оптимизации?

-Определить целевую функцию; задать ограничения на возможные значения х.

Задача 5.

- Зачем нужны ограничения в задаче оптимизации?

Ответ:

Чтобы задача оптимизации стала осмысленной. Например, человек хочет построить загородный дом за минимальную цену. Очевидно, что лучшее решение - не строить дом вообще, т.к. расходы будут равны нулю. Такое "оптимальное" решение получено потому, что не заданы ограничения.

Задача 6. Задайте целевую функцию и ограничения

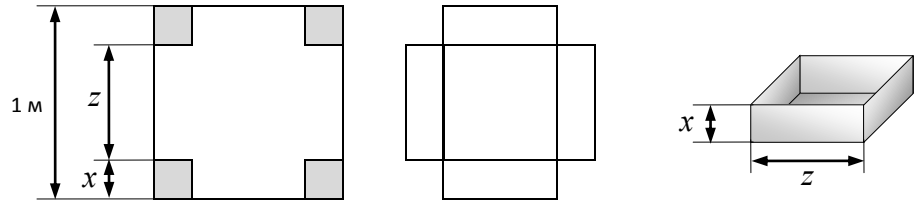
Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить куском проволоки длиной 2p?	$y = x \cdot (p - x)$ $0 < x < p$ Наибольшая площадь равна $\frac{p^2}{4}$
Известно, что одно из двух чисел на 36 больше другого. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.	$y = x \cdot (36 - x)$ $-\infty < x < +\infty$ Числа: -18;18
Диагональ боковой грани правильной четырёхугольной призмы равна d. При какой длине бокового ребра объём призмы будет наибольшим?	$y = x^2 \cdot \sqrt{d^2 - x^2}$ 0<x<d Длина бокового ребра $\frac{d\sqrt{3}}{3}$

Задача 7.

Решите задачу оптимальной раскройки листа различными способами, используя:

4. **Метод дихотомии (**напишите программу).
5. **Табличный процессор Excel**.
6. **Аналитический метод.**

В углах квадратного листа железа, сторона которого равна 1 м, вырезают четыре квадрата со стороной x. Затем складывают получившуюся развертку (по штриховым линиям на рисунке), сваривают швы и таким образом получается бак:



Определите размер выреза x, при котором получится бак наибольшего объема.

Объясните, как работает каждый метод.

1. Составляем функцию (т.е.вспомогательный алгоритм) , к. вычисляет значение целевой функции **f(x)=** x*sqr(1-2*x).
2. Считываем концы отрезка (ограничения), которому принадлежит точка максимума функции.
3. Используя цикл с предусловием применяем метод дихотомии:
   a. вычисляется середина отрезка c:=(a+b)/2;
   b. вычисляем координаты двух точек, симметричных относительно середины x1:=c-r; x2:=c+r; где 0<r=k*(b-a)- некоторое число (k-постоянный коэффициент - 0<k<0,5);
   c. сравниваем значения функции: если f(x1)<f(x2), то максимум находится на отрезке [x1;b], поэтому отрезок [a;x1] можно отбросить-переместить левую границу в точку x1; иначе - граница отрезка перемещается в точку x2.
   d. условие выхода из цикла: постоянная delta-длина получившегося отрезка [a;b]- в нашем примере: 0.0002;
   e. точка максимума- середина получившегося отрезка [a;b].

```
program z_1;
const k=0.01;
eps=0.0001;
var x, delta, a,b,x1,x2,r,c:real;
function  f(x:real):real;
var fx:real;
begin
 fx:=x*sqr(1-2*x);
 f:=fx;
end;
begin
read(a,b);
 delta:=2*eps;
 while b-a>delta do begin
 r:=k*(b-a);
 c:=(a+b)/2;
 x1:=c-r;
 x2:=c+r;
 if f(x1)<f(x2) then a:=x1
            else b:=x2;
            end;
 writeln('x=',(a+b)/2:10:3);
 x:=(a+b)/2;
 writeln('y=',x*(1-2*x)*(1-2*x):10:5);
end.
```

Задача 8.

Укажите достоинства и недостатки методов.

Метод	**Метод дихотомии**	**Табличный процессор Excel**	**Аналитический метод**
Достоинства			
Недостатки			